Järeltöö ülesannete lahendused 10.05.2018

Ülesanne A1

Tõestada, et avaldis $n^3 - 4n + 6$ jagub kolmega iga $n \in \mathbb{N}$ korral.

Induktsioon. $n = 0$ korral $0^3 - 4 \cdot 0 + 6 = 6$ jagub kolmega. Kuna

$$(k+1)^3 - 4(k+1) + 6 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - 4k - 4 + 6 =$$

$$= (k^3 - 4k + 6) + 3k^2 + 3k - 3 =$$

$$= (k^3 - 4k + 6) + 3(k^2 + k - 1),$$

siis eeldusel, et $3 | (k^3 - 4k + 6)$ kehtib ka $3 | ((k+1)^3 - 4(k+1) + 6)$. (m.o.t.t.)

Muidugi saab seda tõestada ka tegurdamise abil:

$$n^3 - 4n + 6 = n^3 - n^2 + n^2 - n - 3n + 6 =$$

$$= n^2(n-1) + n(n-1) - 3(n-2) =$$

$$= (n+1)n(n-1) - 3(n-2)$$

Järeltöö ülesannete lahendused 10.05.2018

Ülesanne B1

Tõestada, et $2^{75}+3^{75}$ jagub 31-ga.

Fermat' teoreemi põhjal $2^{30} \equiv 1 \pmod{31}$ ja $3^{30} \equiv 1 \pmod{31}$, samuti paneme tähele, et $2^5 = 32 \equiv 1 \pmod{31}$ ja $3^3 = 27 \equiv -4 \pmod{31}$. Seega

$$2^{75} = 2^{2\cdot 30+15} = \left(2^{30}\right)^2 \cdot 2^{15} \equiv 1^2 \cdot (2^5)^3 \equiv 1^2 \cdot 1^3 = 1 \pmod{31}$$

$$3^{75} = 3^{2\cdot 30+15} = \left(3^{12}\right)^2 \cdot 3^{15} \equiv 1^2 \cdot (3^3)^5 \equiv 1^2 \cdot (-1)^5 = -1 \pmod{31}$$

Seega $2^{75}+3^{75} \equiv 1-1 = 0 \pmod{31}$

Järeltöö ülesannete lahendused 10.05.2018

Ülesanne A2

Tõestada, et täisarvu $a > 3$ korral ei saa a, $a+2$ ja $a+4$ olla kõik korraga algarvud. Kas nad kõik saavad olla mingite algarvude astmed?

Vaatleme 5 järjestikust arvu $a, a+1, a+2, a+3, a+4$. Kui a ja $a+2$ on algarvud, siis $3|a+1$ ning siis jagub kolmega ka $a+4$. Sümmeetria põhjal, kui $a+2$ ja $a+4$ on algarvud, peavad a ja $a+3$ jaguma kolmega.

a, $a+2$ ja $a+4$ saavad küll olla algarvude astmed, näiteks

$$\begin{aligned}
&\text{kui } a = 5, \text{ siis } 5^1, 7^1, 3^2 = 9\\
&\text{kui } a = 7, \text{ siis } 7^1, 3^2 = 9, 11^1\\
&\text{kui } a = 23, \text{ siis } 23^1, 5^2 = 25, 27^1\\
&\text{kui } a = 79, \text{ siis } 79^1, 3^4 = 81, 83^1\\
&\qquad\text{jne.}
\end{aligned}$$

Järeltöö ülesannete lahendused 10.05.2018

Ülesanne B2

Tõestada, et iga kolmest suurema algarvu jagamisel kuuega tekib jääk 1 või 5.

Olgu $p > 3$ algarv. Kuna p on paaritu, siis $p-1$ ja $p+1$ jaguvad kahega. Kuna p on algarv, siis jagub üks tema naabritest kolmega ja ühtlasi ka kuuega. Kui $6|p-1$, siis $p = 6k+1$ ehk $p \equiv 1 \pmod 6$, kui aga $6|p+1$, siis $p = 6k-1$ ehk $p \equiv -1 \equiv 5 \pmod 6$.

Järeltöö ülesannete lahendused 10.05.2018

Ülesanne A3

Kaardipakist (36 kaarti) tõmmati 6 kaarti. Milline on tõenäosus, et nende hulgas on vähemalt üks emand? Täpselt üks emad?

6 kaardi valikuks on

$$\binom{36}{6} = \frac{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 1\ 947\ 792$$

võimalust. Võimalusi, et ei valita ühtegi emandat on

$$\binom{32}{6} = \frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 906\ 192.$$

Seega tõenäosus vähemalt ühe emanda tõmbamiseks on

$$\frac{\binom{36}{6} - \binom{32}{6}}{\binom{36}{6}} = 1 - \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33} = 1 - \frac{3 \cdot 29}{17 \cdot 11} = 1 - 0,4652 = 43,52\ \%$$

[Kuna kalkulaatorit kasutada pole lubatud, siis võib vastus jääda ka kujule $\frac{\binom{36}{6} - \binom{32}{6}}{\binom{36}{6}}$ vms.]

Täpselt ühe emanda tõmbamise tõenäosus on

$$\frac{\binom{4}{1}\binom{32}{5}}{\binom{36}{6}} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28}{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33} = \frac{8 \cdot 29}{17 \cdot 33} = \frac{232}{561} = 41,35\ \%.$$

Järeltöö ülesannete lahendused 10.05.2018

Ülesanne B3

Kaardipakist (36 kaarti) tõmmati 6 kaarti. Milline on tõenäosus, et nende hulgas on vähemalt kaks emandat? Täpselt kaks emandat?

6 kaardi valikuks on

$$\binom{36}{6} = \frac{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 1\ 947\ 792$$

võimalust.
Vähemalt kahe emanda tõmbamisetõenäosus on (soodsate võimaluste arvu leidmiseks tuleb vähemalt ühe emandaga valikute arvust lahutada täpselt ühe emandaga valikute arv, vt ka eelmine ülesanne):

$$\frac{\binom{36}{6} - \binom{32}{6} - \binom{4}{1}\binom{32}{5}}{\binom{36}{6}} = 1 - \frac{3 \cdot 29}{17 \cdot 11} - \frac{8 \cdot 29}{17 \cdot 33} = 1 - \frac{29}{33} = \frac{4}{33} = 12{,}12\ \%.$$

Täpselt kahe emanda tõmbamiseks on võimalusi

$$\frac{\binom{4}{2}\binom{32}{4}}{\binom{36}{6}} = \frac{6 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 5 \cdot 6}{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33} = \frac{5 \cdot 29}{7 \cdot 17 \cdot 11} = \frac{145}{1309} = 11{,}08\ \%.$$

Järeltöö ülesannete lahendused 10.05.2018

Ülesanne A4

Mitu mittenegatiivset lahendit on võrrandil $x+y+z=11$ lisatingimuste $x \leqslant 3$, $y \leqslant 4$ ja $z \leqslant 6$ korral.

Lahendus 1. Antud tingimusel saame muutujate väärtustamiseks genereerivad funktsioonid:

x: $f(x)=1+x+x^2+x^3$

y: $g(x)=1+x+x^2+x^3+x^4$

z: $h(x)=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$

Ning vastavalt konvulutsioonireeglile on võrrandi lahendite arv võrdne avaldise $f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)$ arendis x^{11} kordajaga. Astendaja 11 võime nende funktsioonide koosseisu kuuluvate liikmete astmetest saada vastavalt $1+4+6=2+3+6=2+4+5=3+2+4=3+3+5=3+4+4=11$, s.o. 6 erineval viisil. Seega on vastus 6.

Järeltöö ülesannete lahendused 10.05.2018

Ülesanne A4

Mitu mittenegatiivset lahendit on võrrandil $x+y+z=11$ lisatingimuste $x \leqslant 3$, $y \leqslant 4$ ja $z \leqslant 6$ korral.

Lahendus 2. Kasutame juurde- ja mahaarvamise meetodit. Olgu tingimused defineeritud järgmiselt:

$$P_x \equiv 0 \leqslant x \leqslant 3 \qquad P_y \equiv 0 \leqslant y \leqslant 4 \qquad P_z \equiv 0 \leqslant z \leqslant 6$$

Tähistagu P tingimust $x, y, z \geqslant 0$ ning $N(P)$ tingimusega P seotud muutujate väärtuste arvu, mis rahuldavad uuritavat võrrandit.
Seega $N(P) = \binom{11+3-1}{11} = \binom{13}{11} = \binom{13}{2} = 13 \cdot 6 = 78$. Sellest tuleks lahutada nende lahendite arv, mis ei rahulda muutujatele seatud ülemisi tõkkeid. Näiteks muutuja x korral oleks see samaväärne mittenegatiivsete lahendite arvu otsimisega võrrandile $4+x+y+z=11$ ehk $x+y+z=7$. Seega saame sellitse lahendite arvuks

$$N(\overline{P}_x) = \binom{7+3-1}{7} = \binom{9}{7} = \binom{9}{2} = 9 \cdot 4 = 36$$

Analoogiliselt saame:

$$N(\overline{P}_y) = \binom{6+3-1}{6} = \binom{8}{6} = \binom{8}{2} = 4 \cdot 7 = 28$$

$$N(\overline{P}_z) = \binom{4+3-1}{4} = \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = 3 \cdot 5 = 15$$

$$N(\overline{P}_x\overline{P}_y) = \binom{2+3-1}{2} = \binom{4}{2} = 2 \cdot 3 = 6$$

$$N(\overline{P}_y\overline{P}_z) = 0, \text{ kuna see vastaks võrrandile } 5+7+x+y+z=11$$

$$N(\overline{P}_x\overline{P}_y\overline{P}_z) = 0, \text{ kuna see vastaks võrrandile } 4+5+7+x+y+z=11$$

Seega saaksime võrrandi lahendite arvuks:

$$N(P_xP_yP_z) = 78-36-28-15+6+1+0-6=6.$$

Järeltöö ülesannete lahendused 10.05.2018

Ülesanne B4

Ühele ametikohale kandideerib viis inimest. Valiku teeb 25-liikmeline nõukogu, kelle liikmetest igaüks annab oma hääle täpselt ühe kandidaadi poolt. Milline on tõenäosus, et kõik kandidaadid saavad võrdse arvu hääli?

Olgu x_i häälte arv, mis anti i-nda kandidaadi poolt. Seega on kokku erinevaid häälte jagunemise võimalusi sama palju, kui on naturaalarvulisi lahendeid võrrandil

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 25.$$

Selle võrrandi lahendite arv on teatavasti $n = 25$ ja $k = 5$ korral võrdne $\binom{n+k-1}{k-1}$ ehk

$$\binom{25+5-1}{5-1} = \binom{29}{4} = \frac{29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26}{4 \cdot 3 \cdot 2}$$

$$= 29 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 13 = 377 \cdot 7 \cdot 9 =$$

$$= 2639 \cdot 9 = 23\ 751.$$

Selleks et kõik kandidaadid saaksid võrdse arvu hääli on vaid üks võimalus: $x_i = 5$ iga $i = 1, 2, \ldots, 5$ korral. Seega on tõenäosus $1/23751 \approx 0,004\%$.

Järeltöö ülesannete lahendused 10.05.2018

Ülesanne A5

Leida jada üldliige, kui

$$a_n - 3a_{n-1} - 10a_{n-2} = 12n + 1$$

ning $a_0 = a_1 = 0$.

- homogeense võrrandi lahend: $a_n^{(h)} = c_1 5^n + c_2(-2)^n$;
- Erilahend: $a_n = -n - 2$;
- Üldlahend: $a_n = c_1 5^n + c_2(-2)^n - n - 2$;
- Süsteem konstantide leidmiseks:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 & = & 2 \\ 5c_1 - 2c_2 & = & 3 \end{cases}, \text{ seega } \begin{cases} c_1 & = & 1 \\ c_2 & = & 1 \end{cases}$$

- Vastus: $a_n = 5^n + (-2)^n - n - 2$;
- Kontroll:

Võrrandist: $a_2 = 3 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + 12 \cdot 2 + 1 = 25$;
Lahendist: $a_2 = 5^2 + 2^2 - 2 - 2 = 25 + 4 - 4 = 25$.

Järeltöö ülesannete lahendused 10.05.2018

Ülesanne B5

Leida jada üldliige, kui

$$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 2n+1$$

ning $a_0 = a_1 = 4$.

- homogeense võrrandi lahend: $a_n^{(h)} = c_1 2^n + c_2 3^n$;
- Erilahend: $a_n = n+4$;
- Üldlahend: $a_n = c_1 2^n + c_2 3^n + n + 4$;
- Süsteem konstantide leidmiseks:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} c_1 + c_2 & = & 0 \\ 2c_1 + 3c_2 & = & -1 \end{array} \right. \text{, seega } \left\{ \begin{array}{rcr} c_1 & = & 1 \\ c_2 & = & -1 \end{array} \right.$$

- Vastus: $a_n = 2^n - \cdot 3^n + n + 4$;
- Kontroll:

Võrrandist: $a_2 = 5 \cdot 4 - 6 \cdot 4 + 4 + 1 = 1$;
Lahendist: $a_2 = 2^2 - 3^2 + 2 + 4 = 4 - 9 + 6 = 1$.