

Lauseloogika: Loomulik tuletus

- Loomuliku tuletuse süsteemid on liik tõestussüsteeme nagu Hilberti süsteemidki. Neile on omane, et igal konnektiivil on oma sissetoomise (introduction) ja väljaviimise (elimination) reeglid.
- Loomuliku tuletuse süsteeme võib esitada mitmel moel, siin vaatame standardesitust (à la Prawitz) ja sekventsiesitust (à la Gentzen).
- Standardesituse omapäraks on, et reeglite eeldused võivad olla tingimuslikud: esinevad reeglid kujul

$$\frac{H_{11} \quad \dots \quad H_{1m_1} \quad \dots \quad H_{n1} \quad \dots \quad H_{nm_n}}{B}$$

$A_1 \quad \dots \quad A_n$

- Siin valemid $H_{11}, \dots, H_{1m_1}, \dots, H_{n1}, \dots, H_{nm_n}$ on reegli erinevate eelduste eeldused (hüpoteesid).

- Sellise tuletusreegli sisu on, et kui A_1 on valemi A tuletus valemitehulgast $\Gamma \cup \{H_{11}, \dots, H_{1m_1}\}$ ja \dots ja A_n on valemi A tuletus valemitehulgast $\Gamma \cup \{H_{n1}, \dots, H_{nm_n}\}$, siis

$$\frac{\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_1 & & \mathcal{D}_n \\ A_1 & \dots & A_n \end{array}}{B}$$
 on valemi B tuletus valemitehulgast Γ .

Seega: kasutadaolevad hüpoteesid on tuletuse alamtuletustes erinevad.

- Lauseloogika loomuliku tuletuse standardesitus:
Aksioomiskeeme pole, tuletusreeglid on järgmised:

$$\frac{}{\top} \top I$$

—

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I$$

$$\frac{}{\perp} \perp \mathcal{E} \text{ (EFQ)}$$

$$\frac{A \wedge B}{A} \wedge \mathcal{E}_L \quad \frac{A \wedge B}{B} \wedge \mathcal{E}_R$$

$$\frac{A}{A \vee B} \vee \mathcal{I}_L \quad \frac{B}{A \vee B} \vee \mathcal{I}_R$$

$$\frac{A \vee B \quad \begin{array}{c} A \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} B \\ \vdots \\ C \end{array}}{C} \vee \mathcal{E}$$

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \supset B} \supset I$$

$$\frac{A \supset B \quad A}{B} \supset \mathcal{E} \text{ (MP)}$$

- Eitust vaadatakse sisuliselt kui erikujulist implikatsiooni ($\neg A = A \supset \perp$):

$$\frac{\perp}{\neg A} \neg\mathcal{I} \qquad \frac{\neg A \quad A}{\perp} \neg\mathcal{E}$$

- Lisaks on tarvis veel üht reeglit (selle ärajätmisega saaksime tuletussüsteemi intuitsionistlikule lauseloogikale):

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} \neg A \\ \vdots \\ C \end{array}}{C} \text{ dil.}$$

- Alternatiive viimasele reeglile:

$$\frac{}{A \vee \neg A} \text{ TND} \qquad \frac{\perp}{A} \text{ RAA} \qquad \frac{\neg\neg A}{A} \text{ DNE}$$

- Nimede seletusi:
 - EFQ: ex falso quodlibet, väärusest mida tahes
 - MP: modus ponens
 - dil.: dilemma
 - TND: tertium non datur, kolmandat pole antud (välistatud kolmanda seadus)
 - RAA: reductio ad absurdum, taandamine absurdile
 - DNE: double negation elimination

- Näiteid:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{+1}{(p \supset q) \wedge (r \supset s)}}{p \supset q} \wedge \mathcal{E}_L \quad \frac{+3}{p} \supset \mathcal{E}}{\frac{q}{q \vee s} \vee \mathcal{I}_L} \quad \frac{\frac{+1}{(p \supset q) \wedge (r \supset s)}}{r \supset s} \wedge \mathcal{E}_R \quad \frac{+4}{r} \supset \mathcal{E}}{\frac{s}{q \vee s} \vee \mathcal{I}_R} \supset \mathcal{E}, -3, -4 \\
 \hline
 \frac{+2}{p \vee r} \quad \frac{q \vee s}{p \vee r \supset q \vee s} \supset \mathcal{I}, -2 \\
 \hline
 \frac{(p \supset q) \wedge (r \supset s) \supset (p \vee r \supset q \vee s)}{} \supset \mathcal{I}, -1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{+1}{q} \supset \mathcal{I}, -3}{(p \supset q) \vee (q \supset r)} \vee \mathcal{I}_L \quad \frac{\frac{+2}{\neg q} \quad \frac{+4}{q} \neg \mathcal{E}}{\frac{\perp}{r} \perp \mathcal{E}} \supset \mathcal{I}, -4}{(p \supset q) \vee (q \supset r)} \vee \mathcal{I}_R \\
 \hline
 (p \supset q) \vee (q \supset r) \quad \text{Dilemma, } -1, -2
 \end{array}$$

- Loomuliku tuletuse sekventsiesituse idee on muuta arvepidamine parajasti kasutada olevate hüpoteeside üle ilmutatuks.
- Tõestatavateks/tuletatavateks objektideks pole mitte valemid, vaid nn sekventsid, so figuurid kujul $\Gamma \rightarrow A$, kus Γ on lõplik (võibolla tühi) hulk valemid (NB! hulk, mitte list või multihulk, st järjestus, kordsus ei loe) ning A on valem.
- (Hulkade kirjutamiseks kasutame lihtsustatud süntaksit: A_1, \dots, A_n tähistab hulka $\{A_1, \dots, A_n\}$; Γ, A tähistab hulka $\Gamma \cup \{A\}$.)
- Sekventsi $\Gamma \rightarrow A$ tõestatavus on sama, mis valemi A tuletatavus valemihulgast Γ loomuliku tuletuse varemantud esituses.
- Valem A loetatakse tõestatavaks, kui on tõestatav sekvents $\rightarrow A$.
- Sekventsi $A_1, \dots, A_n \rightarrow B$ võib samastada valemiga $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \supset B$; meenutame, et 0 valemi konjunksioon on \top .

- Sekventsiesituse aksioomiskeemid ja tuletusreeglid:
(Paneme tähele, et tingimuslike eeldustega reegleid enam pole.)

$$\begin{array}{c}
 \overline{\Gamma \rightarrow \top} \quad \top\mathcal{I} \\
 \\
 \overline{\Gamma, A \rightarrow A} \quad \text{hyp.} \\
 \\
 \frac{\Gamma \rightarrow A \quad \overline{\Gamma \rightarrow B}}{\Gamma \rightarrow A \wedge B} \quad \wedge\mathcal{I} \\
 \\
 \frac{\Gamma \rightarrow A}{\Gamma \rightarrow A \vee B} \quad \vee\mathcal{I}_L \quad \frac{\Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \vee B} \quad \vee\mathcal{I}_R \\
 \\
 \frac{\Gamma, A \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \supset B} \quad \supset\mathcal{I} \\
 \\
 \frac{\Gamma, A \rightarrow \perp}{\Gamma \rightarrow \neg A} \quad \neg\mathcal{I} \\
 \\
 \frac{\Gamma \rightarrow A \wedge B}{\Gamma \rightarrow A} \quad \wedge\mathcal{E}_L \quad \frac{\Gamma \rightarrow A \wedge B}{\Gamma \rightarrow B} \quad \wedge\mathcal{E}_R \\
 \\
 \frac{\Gamma \rightarrow A \vee B \quad \Gamma, A \rightarrow C \quad \Gamma, B \rightarrow C}{\Gamma \rightarrow C} \quad \vee\mathcal{E} \\
 \\
 \frac{\Gamma \rightarrow A \supset B \quad \Gamma \rightarrow A}{\Gamma \rightarrow B} \quad \supset\mathcal{E} \\
 \\
 \frac{\Gamma \rightarrow \neg A \quad \Gamma \rightarrow A}{\Gamma \rightarrow \perp} \quad \neg\mathcal{E} \\
 \\
 \frac{\Gamma, A \rightarrow C \quad \Gamma, \neg A \rightarrow C}{\Gamma \rightarrow C} \quad \text{dil.}
 \end{array}$$

Lauseloogika: Sekventsiarvutus

- Sekventsiarvutused on kolmas alternatiiv tõestussüsteeme Hilberti süsteemide ja loomuliku tuletuse süsteemide kõrval. Neid ei tohi segamini ajada loomuliku tuletuse sekventsiesitustega.
- Kui loomulikus tuletuses olid igal konnektiivil oma sissetoomise ja väljaviimise reeglid, siis sekventsiarvutustes on igal konnektiivil oma parema ja vasaku poole reeglid.
- Sekventsid on sedapuhku nõ mitmejärgelised: sekvents on figuur kujul $\Gamma \rightarrow \Delta$, kus nii Γ kui ka Δ on lõplikud (võibolla tühjad) hulgad valemeid (taas hulgad, mitte listid või multihulgad, st järjestus, kordsus ei loe).
- Valem A loetatakse tõestatavaks, kui on tõestatav sekvents $\rightarrow A$.
- Sekventsi $A_1, \dots, A_n \rightarrow B_1, \dots, B_m$ võib samastada valemiga $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \supset B_1 \vee \dots \vee B_m$; meenutame, et 0 valemi konjunktsioon on \top ja 0 valemi disjunktsioon on \perp .

- Sekventsiarvutuse aksioomiskeemid ja tuletusreeglid (tagasisuunalisele otsimisele häälestatud versiooni jaoks):

$$\begin{array}{c}
 \overline{\Gamma, A \rightarrow A, \Delta} \text{ hyp} \\
 \\
 \overline{\Gamma \rightarrow \top, \Delta} \top \mathcal{R} \qquad \qquad \qquad - \\
 \\
 - \qquad \qquad \qquad \overline{\Gamma, \perp \rightarrow \Delta} \perp \mathcal{L} \\
 \\
 \frac{\Gamma \rightarrow A, \Delta \quad \Gamma \rightarrow B, \Delta}{\Gamma \rightarrow A \wedge B, \Delta} \wedge \mathcal{R} \qquad \qquad \frac{\Gamma, A, B \rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \rightarrow \Delta} \wedge \mathcal{L} \\
 \\
 \frac{\Gamma \rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \rightarrow A \vee B, \Delta} \vee \mathcal{R} \qquad \qquad \frac{\Gamma, A \rightarrow \Delta \quad \Gamma, B \rightarrow \Delta}{\Gamma, A \vee B \rightarrow \Delta} \vee \mathcal{L} \\
 \\
 \frac{\Gamma, A \rightarrow B, \Delta}{\Gamma \rightarrow A \supset B, \Delta} \supset \mathcal{R} \qquad \qquad \frac{\Gamma \rightarrow A, \Delta \quad \Gamma, B \rightarrow \Delta}{\Gamma, A \supset B \rightarrow \Delta} \supset \mathcal{L} \\
 \\
 \frac{\Gamma, A \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \neg A, \Delta} \neg \mathcal{R} \qquad \qquad \frac{\Gamma \rightarrow A, \Delta}{\Gamma, \neg A \rightarrow \Delta} \neg \mathcal{L}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\frac{\overline{p \rightarrow p, q} \text{ hyp.} \quad \overline{q, p \rightarrow q} \text{ hyp.}}{p \supset q, p \rightarrow q} \supset \mathcal{L} \\
\frac{p \supset q, p \rightarrow q}{p \supset q, \neg q, p \rightarrow} \neg \mathcal{L} \\
\frac{p \supset q, \neg q, p \rightarrow}{p \supset q, \neg q \rightarrow \neg p} \neg \mathcal{R} \\
\frac{p \supset q, \neg q \rightarrow \neg p}{p \supset q \rightarrow \neg q \supset \neg p} \supset \mathcal{R} \\
\frac{p \supset q \rightarrow \neg q \supset \neg p}{\rightarrow (p \supset q) \supset (\neg q \supset \neg p)} \supset \mathcal{R}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\frac{\overline{q \supset r, p \rightarrow p, r} \text{ hyp.} \quad \overline{r, q \supset r, p \rightarrow r} \text{ hyp.} \quad \overline{p \supset r, q \rightarrow q, r} \text{ hyp.} \quad \overline{p \supset r, r, q \rightarrow r} \text{ hyp.}}{p \supset r, q \supset r, p \rightarrow r} \supset \mathcal{L} \quad \frac{p \supset r, q \supset r, q \rightarrow r}{p \supset r, q \supset r, q \rightarrow r} \supset \mathcal{L} \\
\frac{p \supset r, q \supset r, p \rightarrow r}{p \supset r, q \supset r, p \vee q \rightarrow r} \vee \mathcal{L} \\
\frac{p \supset r, q \supset r, p \vee q \rightarrow r}{p \supset r, q \supset r \rightarrow p \vee q \supset r} \supset \mathcal{R} \\
\frac{p \supset r \rightarrow (q \supset r) \supset (p \vee q \supset r)}{p \supset r \rightarrow (q \supset r) \supset (p \vee q \supset r)} \supset \mathcal{R} \\
\frac{p \supset r \rightarrow (q \supset r) \supset (p \vee q \supset r)}{\rightarrow (p \supset r) \supset ((q \supset r) \supset (p \vee q \supset r))} \supset \mathcal{R}
\end{array}$$