Aksiomaatilised teooriad

- Kui loogika on keel, kus loogikaväliste sümbolite tähendus on vaba, siis matemaatikas ja loogika rakendustes üldiselt peame me silmas mingit kindlat üht interpretatsiooni (nn kavatsetud interpretatsiooni) või siis interpretatsioonide klassi.
  Näitena sobib predikaatloogika interpretatsiooni põhihulgaks sobida mistahes hulk ja sümbolid $=$, 0, $+$ võivad üldiselt tähendada milliseid relatsioone ja funktsioone tahes, kuid me võime silmas pidada konkreetselt naturaalarve, võrdust, nulli ja liitmist.
- Sellises olukorras räägitakse loogika asemel *teooriast*.
- *Aksiomaatiline teooria* on teooria, kus huvipakkuv interpretatsioon või interpretatsioonide klass on spetsifitseeritud mingi lõpliku (või lahenduva) hulga valemitega. Neid valemeid nimetatakse teooria aksioomideks ning huvi pakkuvad nende valemite mudelid.

- Näide: Range järjestuse teooria.
- Predikaatsümbol $<$. Aksioomid:

$$\forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z \supset x < z)$$
$$\forall x \neg x < x$$

- Need aksioomid fikseerivad, et $<$ on põhihulga range järjestus.
- Nendest järeldub nt $\forall x \forall y (x < y \supset \neg y < x)$.

- Näide: Võrduse teooria.
- Predikaatsümbol $=$. Aksioomid:

$$\forall x x = x$$
$$\forall x \forall y \forall z_1 \ldots \forall z_n (x = y \wedge A[x] \supset A[y])$$

Teine aksioom on õieti aksioomiskeem, kus A on suvaline valem.

- Toodud aksioomid fikseerivad, et $=$ on võrdus (Leibnizi mõttes).
- Nendest järeldub vahetult nt $\forall x \forall y \forall z (x = y \wedge x = z \supset y = z)$ ning edasi nt $\forall x \forall y (x = y \supset y = x)$.

- Näide: Rühmateooria.
- Funktsioonisümbolid 1, $*$ ja $(-)^{-1}$. Predikaatsümbol $=$.
- Aksioomid: Võrduse aksioomid pluss

$$\begin{aligned} 1 * x &= x \\ x * 1 &= x \\ x * (y * z) &= (x * y) * z \\ x * x^{-1} &= 1 \\ x^{-1} * x &= 1 \end{aligned}$$

- Neid aksioome rahuldab iga rühm, nt täisarvud, null, liitmine ja vastandarvu leidmine, või positiivsed ratsionaalarvud, üks, korrutamine ja pöördarvu leidmine jne.

- Näide: Stringide teooria.
- Funktsioonisümbolid e, $.$, predikaatsümbolid $=$, C, S. Aksioomid: Võrduse aksioomid pluss

$$S(e)$$
$$\forall x \forall y (C(x) \wedge S(y) \supset S(x.y))$$

- e tähistab tühja stringi, $.$ on stringi prefikseerimine tähemärgiga, C on tähemärgisort, S on stringisort.
- Saame tuletada nt $\forall x \forall y\, (C(x) \wedge C(y) \supset S(x.y.e))$.

- Võiksime lisada veel aksioomiskeemi

  $$A[e] \wedge \forall x \forall y \, (C(x) \wedge S(y) \wedge (A[y] \supset A[x.y]))) \supset \forall y \, (S(y) \supset A[y])$$

  (induktsiooniskeem)
- Induktsioon kajastab meie tahtmist, et stringid moodustuksid ainult tühjast stringist ja juba moodustatud stringidele tähemärgi prefikseerimisest, lõpliku arvu sammudega.
- Tulenevalt sellisest konstruktsoonist kehtib, et kui mingi omadus on tühjal stringil ja seda omadust evivale stringile tähemärgi prefiseerimisel omadus säilib, siis on sama omadus kõigil stringidel.
- Induktsiooniga saab tõestada nt et

  $$\forall z(S(z) \supset z = e \vee \exists x \exists y \, (C(x) \wedge S(y) \wedge z = x.y))$$

- Võime stringide teooriale lisada veel funktsioonisümboli # ja aksioomid

$$\forall x \forall y\, (S(x) \wedge S(y) \supset S(x \# y))$$
$$\forall x\, (S(x) \supset e \# x = x)$$
$$\forall x \forall y \forall z\, (C(x) \wedge S(y) \wedge S(z) \supset (x.y) \# z = x.(y \# z))$$

  Need defineerivad stringide konkatenatsiooni.
- Induktsiooni abiga saab tuletada, et tühi string on konkatenatsiooni parem ühik (et ta on vasak ühik, on aksioom):

$$\forall x\, (S(x) \supset x \# e = e)$$

- Induktsiooni abiga saab tuletada, konkatenatsioon on assotsiatiivne:

$$\forall x \forall y \forall z (S(x) \wedge S(y) \wedge S(z) \supset (x \# y) \# z = x \# (y \# z))$$