

Eksam ainekst Loogika arvutiteaduses ITI 0041 4.1.2008 kl 9.00
Lahendused

1. (8 p) Tõesta loomulikus tuletuses ja sekventsiarvutuses valemid

$$(p \supset q) \wedge r \supset (\neg q \supset \neg p) \vee s$$

$$(p \supset q) \supset ((\neg p \supset r) \supset (\neg q \supset r))$$

NB. Teise valemiga korral läheb loomulikus tuletuses vaja Dilemma või RAA reeglit.

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{}{+1}}{(p \supset q) \wedge r}}{p \supset q} \wedge \mathcal{E}_L}{\neg q} \supset \mathcal{E}}{q} \supset \mathcal{E}}{\frac{\frac{\frac{}{\perp}}{\neg p} \neg \mathcal{I}, -3}{\neg q \supset \neg p} \supset \mathcal{I}, -2}}{\frac{}{(\neg q \supset \neg p) \vee s} \vee \mathcal{I}_L} \supset \mathcal{I}, -1}$$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{}{+1}}{p \supset q}}{\neg q} \supset \mathcal{E}}{q} \supset \mathcal{E}}{r} \supset \mathcal{E}}{\frac{\frac{\frac{}{\perp}}{r} \perp \mathcal{E}}{\neg q \supset r} \supset \mathcal{I}, -3}}{\frac{}{(\neg p \supset r) \supset (\neg q \supset r)} \supset \mathcal{I}, -2} \supset \mathcal{I}, -1$$

2. (8 p) Tõesta loomulikus tuletuses ja sekventsiarvutuses valemid

$$\forall x p(x, f(x, a)) \supset \forall y \exists z p(y, z)$$

$$\forall x (p(g(f(x))) \vee p(x)) \supset (\neg p(a) \supset \exists y p(g(y)))$$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{}{+1}}{\forall x p(x, f(x, a))}}{p(y', f(y', a))} \forall \mathcal{E}}{\exists z p(y', z)} \exists \mathcal{I}}{\frac{}{\forall y \exists z p(y, z)} \forall \mathcal{I}, y' \text{ v\u00e4rske}} \supset \mathcal{I}, -1$$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{}{+1}}{\forall x (p(g(f(x))) \vee p(x))}}{p(g(f(a))) \vee p(a)} \forall \mathcal{E}}{\exists y p(g(y))} \exists \mathcal{I}}{\frac{\frac{\frac{}{\perp}}{\neg p(a)} \neg \mathcal{E}}{\exists y p(g(y))} \perp \mathcal{E}}{\frac{}{\neg p(a) \supset \exists y p(g(y))} \supset \mathcal{I}, -2} \supset \mathcal{I}, -1$$

3. (3 p) Konstrueeri disjunktiiivsel normaalkujul valem A (litaalide konjunktsioonide disjunktioon), mis vastaks tõeväärtustabelile

p	q	r	A
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

Täielik DNK: $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$.

Minimeeritud: $(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (\neg p \wedge r)$.

4. (5 p) Kasutades predikaate

$\ell(x, y)$ — x -ile meeldib y
 $c(x)$ — x on kass
 $d(x)$ — x on koer

ja võrdust, tõlgi järgmised loomuliku keele laused predikaatloogikasse

Igale koerale meeldib mõni kass.

$\forall x (d(x) \supset \exists y (c(y) \wedge \ell(x, y)))$ või $\forall x \exists y (d(x) \supset c(y) \wedge \ell(x, y))$

On koeri, on kasse.

$\exists x d(x) \wedge \exists y c(y)$.

Kui kellelegi meeldib mõni koer, on ta kass.

$\forall x (\exists y (\ell(x, y) \wedge d(y)) \supset c(x))$ või $\forall x \forall y (\ell(x, y) \wedge d(y) \supset c(x))$

Mitte kõik, kes iseendale meeldivad, pole kassid.

$\neg \forall x (\ell(x, x) \supset c(x))$ või $\exists x (\ell(x, x) \wedge \neg c(x))$

Mitte keegi pole nii koer kui ka kass.

$\neg \exists x (d(x) \wedge c(x))$

Meeldimine pole alati vastastikune.

$\neg \forall x \forall y (\ell(x, y) \supset \ell(y, x))$ või $\exists x \exists y (\ell(x, y) \wedge \neg \ell(y, x))$

5. (3 p) Teisenda klauselkujule (skolemiseeritud konjunktiivne normaalkuju) valem

$$\exists x \neg \exists y \forall z ((p(a, x) \supset \neg \exists w q(f(w))) \wedge r(y, z))$$

Prenekskuju: $\exists x \forall y \exists z \exists w [(p(a, x) \wedge q(f(w))) \vee \neg r(y, z)]$.

Prenekskuju maatriksiga KNKI: $\exists x \forall y \exists z \exists w [(p(a, x) \vee \neg r(y, z)) \wedge (q(f(w)) \vee \neg r(y, z))]$.

Skolemiseeritud: $(p(a, c) \vee \neg r(y, g(y))) \wedge (q(f(h(y))) \vee \neg r(y, g(y)))$.

6. (5 p) Vaatleme Kripke struktuuri $M = (W, R, I)$, kus $W = \{w_0, w_1, w_2, w_3, w_4\}$, $R = \{(w_0, w_1), (w_0, w_2), (w_1, w_1), (w_1, w_2), (w_2, w_0), (w_4, w_1), (w_4, w_3)\}$ ning I on antud tabeliga

	p	q
w_0	1	0
w_1	1	1
w_2	1	0
w_3	0	1
w_4	1	1

Millistes maailmades kehtib $\diamond(p \supset \Box q)$? Millistes kehtib $\neg \diamond \Box (\diamond p \wedge q)$? Põhjenda.

Esita struktuur ka graafiliselt.

	p	q	$\Box q$	$p \supset \Box q$	$\Diamond(p \supset \Box q)$	$\Diamond p$	$\Diamond p \wedge q$	$\Box(\Diamond p \wedge q)$	$\Diamond\Box(\Diamond p \wedge q)$	$\neg(\dots)$
w_0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
w_1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1
w_2	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
w_3	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1
w_4	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0

7. (6 p) Näita semantilise aruteluga, et modaalloogikas KB (sümmeetriliste raamide loogika) on valemid

$$\begin{aligned} & \Diamond(p \vee \Box q) \wedge \Box\neg p \supset q \\ & p \supset \Box\Box\Diamond p \end{aligned}$$

üldkehtivad.

(a) Olgu mingil sümmeetrilisel raamil F fikseeritud mingi interpretatsioon I . Kui mingis maailmas w kehtib $\Diamond(p \vee \Box q) \wedge \Box\neg p$, siis kehtib selles ka $\Box\neg p$ ja igas temast saavutatavas maailmas on p väär. Et samal ajal kehtib w -s $\Diamond(p \vee \Box q)$ ehk mingis w -st saavutatavas maailmas w' kehtib $p \vee \Box q$, peab selles maailmas w' kehtima $\Box q$. See aga tähendab, et kõigis w' -st saavutatavates maailmades kehtib q . Sümmeetria põhjal on selliste maailmade seas w .

(b) Olgu mingil sümmeetrilisel raamil F fikseeritud mingi interpretatsioon I . Kui mingis maailmas w kehtib p , siis sümmeetria põhjal on kõigist w -st kahe sammuga saavutatavatest maailmadest maailm w (kus kehtis p) kahe sammuga saavutatav, mis tähendab, et w -s kehtib $\Box\Box\Diamond p$.

8. (3 p) Esita raamitingimus, mis vastab valemile $\Diamond(p \wedge q) \wedge \Diamond(p \wedge \neg q) \supset \Box p$. Põhjenda. (Vihje: Mõttele sellele, et valemile $\Diamond p \supset \Box p$ vastav raamitingimus on, et iga maailma jaoks leidub ülimalt üks temast saavutatav maailm.)

Iga maailma jaoks leidub ülimalt kaks temast saavutatavat maailma.

Kui see tingimus kehtib, siis on iga interpretatsiooni puhul $\Diamond(p \wedge q) \wedge \Diamond(p \wedge \neg q) \supset \Box p$ igas maailmas tõsi. Tõepoolest: kui mingis maailmas w kehtib $\Diamond(p \wedge q) \wedge \Diamond(p \wedge \neg q)$, siis peab leiduma vähemalt kaks w -st saavutatavat maailma, kus kehtib p (kusjuures ühes neist kehtib q ja teises $\neg p$ ning need kaks ei saa kehtida samas maailmas). Et aga rohkem saavutatavaid maailmu ei saa olla, võime järeldada, et p kehtib kõigis w -st saavutatavates maailmades, seega w -s kehtib $\Box p$.

Kui see tingimus ei kehti, leidub maailm w , mille jaoks on olemas vähemalt kolm saavutatavat maailma w_1, w_2 ja w_3 . Siis ei kehti $\Diamond(p \wedge q) \wedge \Diamond(p \wedge \neg q) \supset \Box p$ interpretatsioonides, kus p kehtib w_1 ja w_2 -s, aga ei kehti w_3 -s, ning q kehtib w_1 -s ja ei kehti w_2 -s.

9. (3 p) Vaatleme Kripke raami $F = (W, R)$, kus $W = \{w_0, w_1, w_2\}$, $R = \{(w_0, w_1), (w_0, w_2), (w_2, w_1)\}$. Leia selle jaoks interpretatsioon I , mis väärab maailmas w_0 valemi $\Box(\Diamond p \supset p)$.

Piisab, kui p on w_1 -s tõene ja w_2 -s väär. Siis w_2 -s kehtib $\Diamond p$. Edasi w_2 -s ei kehti $\Diamond p \supset p$ ja seega w_0 -s ei kehti $\Box(\Diamond p \supset p)$.

10. (6 p) Kuidas lugeda dünaamilise loogika valemid

$$\begin{aligned} & \langle (a; b)^* \rangle p \supset p \vee \langle a; (b; a)^*; b \rangle p \\ & \neg p \supset [p?; a]r \end{aligned}$$

Näita semantilise aruteluga, et nad on üldkehtivad.

(a) Kui pärast a ja b jada mittedeterministliku kordust võib kehtida p , siis kas p kehtib kohe või pärast a , (b ja a jada mittedeterministlikku korduse) ja b jada võib kehtida p .

Eeldame, pärast a ja b jada mittedeterministliku kordust võib kehtida p . Iga $a; b$ kordus on kas nullkordne või vähemalt ühekordne, mistõttu on ta on vaadeldav a ja $(b; a)^*$ ja b jada realisatsioonina. p peab võima kehtida ühes neist situatsioonidest.

(b) Kui p ei kehti, siis pärast p testi ja a jada r kehtib.

Eeldame, et p on väär. Siis p testi ei saa täita ja järelkult ei saa täita ka p testi ja a jada. Seetõttu kehtib r pärast seda toimingut igal juhul triviaalsel põhjusel.