

Dünaamiline loogika

- Dünaamiline loogika on erijuhtum modaalloogikat, mille mõtteks on arutlemine programmide käitumise üle.
- Erinevalt tavalisest n-ö ühemodaalsest loogikast, on dünaamiline loogika mitmemodaalne. Modaalsused on indekseeritud toimingutega (programmidega).

Dünaamiline loogika: Süntaks

- Dünaamilise loogika signatuur koosneb kahest tähestikust $PC = \{p, q, \dots\}$ ja $AC = \{a, b, \dots\}$, mille sümboleid nimetatakse lausesümboliteks ja toimingusümboliteks.
- Keeles on kaks kategooriat avaldisi—valemid \mathbb{F} ja toiminguavaldised Act —, mis on defineeritud induktiivselt järgmiste tingimustega:
 - kõik lausesümbolid on valemid (nn atomaarvalemid);
 - \top, \perp on valemid;
 - kui A on valem, siis $\neg A$ on samuti valem;
 - kui A, B on valemid, siis $A \wedge B, A \vee B, A \supset B$ on ka valemid;
 - kui A on valem ja α on toiming, siis $[\alpha]A$ (pärast α teostamist paramatult A), $\langle \alpha \rangle A$ (pärast α teostamist võibolla A) on ka valemid.

- kõik toimingusümbolid on toiminguavaldised;
- kui α, β on toiminguavaldised, siis $\alpha; \beta$ (esiteks α , siis β) on toiminguavaldis;
- kui α, β on toiminguavaldised, siis $\alpha \cup \beta$ (mittedeterministlik valik α ja β vahel) on toiminguavaldis;
- kui α on toiminguavaldis, siis α^* (α mittedeterministlik kordus) on toiminguavaldis;
- kui A on valem, siis $A?$ (A test) on toiminguavaldis.

Dünaamiline loogika: Semantika

- Dünaamilise loogika Kripke struktuur on kolmik $M = (W, R, I)$, kus W on mittetühi hulk, mille elemente nimetatakse võimalikeks maailmadeks, R on toimingusümbolitega indekseeritud binaarsete seoste pere sellel ning I on funktsioon $PC \times W \rightarrow \{1, 0\}$.
- Valemite ja toimingute väärtustused etteantud struktuuris on funktsioonid $\llbracket \cdot \rrbracket^{M, \cdot} : \text{Fma} \times W \rightarrow \{1, 0\}$,
 $\llbracket \cdot \rrbracket^{M, \cdot} : \text{Act} \rightarrow \mathcal{P}(W \times W)$:
 - $\llbracket p \rrbracket^{M, w} = I(w, p)$, kui p on lausesümbol;
 - $\llbracket \top \rrbracket^{M, w} = 1$, $\llbracket \perp \rrbracket^{M, w} = 0$;
 - $\llbracket \neg A \rrbracket^{M, w} = 1 - \llbracket A \rrbracket^{M, w}$;
 - $\llbracket A \wedge B \rrbracket^{M, w} = \min(\llbracket A \rrbracket^{M, w}, \llbracket B \rrbracket^{M, w})$;
 - $\llbracket A \vee B \rrbracket^{M, w} = \max(\llbracket A \rrbracket^{M, w}, \llbracket B \rrbracket^{M, w})$;
 - $\llbracket A \supset B \rrbracket^{M, w} = \max(1 - \llbracket A \rrbracket^{M, w}, \llbracket B \rrbracket^{M, w})$;
 - $\llbracket [\alpha]A \rrbracket^{M, w} = \min_{w' \in W, w} [\alpha]_{M, w'}(\llbracket A \rrbracket^{M, w'})$;
 - $\llbracket \langle \alpha \rangle A \rrbracket^{M, w} = \max_{w' \in W, w} [\alpha]_{M, w'}(\llbracket A \rrbracket^{M, w'})$.

- $w[[a]]^M w'$ parajasti siis, kui $(w, w') \in R(a)$,
- $w[[\alpha; \beta]]^M w'$ parajasti siis, kui leidub $w'' \in W$ nii, et $w[[\alpha]]^M w''$ ja $w''[[\beta]]^M w'$,
- $w[[\alpha \cup \beta]]^M w'$ parajasti siis, kui $w[[\alpha]]^M w'$ või $w[[\beta]]^M w'$,
- $w[[\alpha^*]]^M w'$ parajasti siis, kui leiduvad $n \geq 0$ ja $w_0, \dots, w_n \in W$ nii, et $w = w_0$, $w_0[[\alpha]]^M w_1$, \dots , $w_{n-1}[[\alpha]]^M w_n$, $w_n = w'$;
- $w[[A?]]^M w'$ parajasti siis kui $w = w'$ ja $[[A]]^{M,w} = 1$.

Programmeerimine dünaamilises loogikas

- Toiminguavaldised on kasutatavad programmeerimiskeelena:

$$\text{skip} = \top?$$

$$\text{fail} = \perp?$$

$$\text{if } A_1 \rightarrow \alpha_1 \mid \dots \mid A_n \rightarrow \alpha_n \text{ fi} = (A_1?; \alpha_1) \cup \dots \cup (A_n?; \alpha_n)$$

$$\text{do } A_1 \rightarrow \alpha_1 \mid \dots \mid A_n \rightarrow \alpha_n \text{ od} = (\text{if } A_1 \rightarrow \alpha_1 \mid \dots \mid A_n \rightarrow \alpha_n \text{ fi})^* \\ (\neg A_1 \wedge \dots \wedge \neg A_n)?$$

$$\text{if } A \text{ then } \alpha_0 \text{ else } \alpha_1 = \text{if } A \rightarrow \alpha_0 \mid \neg A \rightarrow \alpha_1 \text{ fi}$$

$$\text{while } A \text{ do } \alpha = \text{do } A \rightarrow \alpha \text{ od}$$

$$\text{repeat } \alpha \text{ until } A = \alpha; \text{while } \neg A \text{ do } \alpha$$

Hilberti süsteem

- Dünaamilise loogika Hilberti süsteem on antud lauseloogika aksioomide, aksioomi K, reeglite MP ja NR (necessitation rule) ning aksioomidega:

$$\begin{aligned}[\alpha; \beta]A &\equiv [\alpha][\beta]A \\ [\alpha \cup \beta]A &\equiv [\alpha]A \wedge [\beta]A \\ [B?]A &\equiv B \supset A \\ [\alpha^*]A &\supset A \wedge [\alpha][\alpha^*]A \\ A \wedge [\alpha^*](A \supset [\alpha]A) &\supset [\alpha^*]A\end{aligned}$$