О РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИОНАЛАХ ВЫСШИХ ТИПОВ

Т.Уусталу

В настоящей работе доказана равносильность двух подходов к определению понятия рекурсивности т.н. функционалов высших типов (понятие типа см. [I]). Первый из них является обобщением определения рекурсивности операторов из [2,5] , второй естественно обобщает подход, предложенный в [3]. Оба эти определения построены таким образом, что для типов $(0,\dots,0\to 0)$ (функции), $((0,\dots,0\to 0)\to(0,\dots,0\to 0))$ (операторы) и $((0,\dots,0\to 0)\to 0)$ (функционалы в обычном смысле) они совпадают с традиционными определениями рекурсивности.

Определения построены индуктивно (по структуре типа). При первом подходе используется понятие непрерывности функционала; с каждым непрерывным функционалом связывается некоторая частичная функция, называемая его анкетой. Анкета определяет значение функционала с помощью конечных частей анкет аргументов. Для рекурсивности данного функционала требуется существование вычислимой анкеты для него.

В случае второго определения (т.н. L - рекурсивность) данный функционал L-рекурсивен, если найдется вычислимая функция, которая преобразует L-номера аргументов в L-номера значений. L-номером самого данного функционала будет геделев номер этой функции.

Пусть $\hat{\theta}$ означает код конечной функции θ (см. напр. [3])

Определение I. (I) Всякий функционал типа 0 (натуральные числа) непрерывен. Анкетой функционала f^0 типа 0 называется само число f^0.

(2) Функционал $f^{(s_1;\dots;s_n\to 0)}$, определенный на множестве непрерывных функционалов, называется непрерывным, если существует n-местная функция g, такая, что для всех функций $g_1, g_2, \dots, g_n$, являющихся анкетами функционалов $\psi_1^{s_1}, \psi_2^{s_2}, \dots, \psi_n^{s_n}$ соответственно, равенство

$$f^{(s_1;\dots;s_n\to 0)}(\psi_1^{s_1},\dots,\psi_n^{s_n}) = y$$

равносильно существованию конечных функций $\theta_1 \leq g_1, \dots,$ $\theta_n \leq g_n$, таких, что

$$g(\widehat{\theta}_1, \dots, \widehat{\theta}_n) = y.$$

<u>Определение 2</u>. Функционал называется рекурсивным, если для него существует вычислимая анкета.

$ank(i,s)$ означает, что φ_i – анкета некоторого рекурсивного функционала типа $s=(s_1;\dots;s_n \to 0)$ (который обозначается через Ψ_i^s). Здесь $\{\varphi_i\}$ – некоторая фиксированная геделевская нумерация n -местных вычислимых функций.

Следующие теоремы являются обобщениями теорем Майхилла-Шепердсона и теоремы о неподвижной точке.

<u>Теорема I</u>. Пусть $f^{(s\to t)}$, $(t \neq 0)$ – рекурсивный функционал. Тогда существует одноместная общерекурсивная функция h, такая, что

$$(\forall i)(ank(i,s) \Rightarrow f^{(s\to t)}(\Psi_i^s) = \Psi_{h(i)}^t).$$

<u>Определение 3</u>. Одноместная тотальная функция h $(s\to t)$ – экстенсиональна $(t\neq 0)$ тогда и только тогда, когда

$$(\forall i)(ank(i,s) \Rightarrow ank(h(i),t)) \,\&\, (\forall i)(\forall j)(\Psi_i^s = \Psi_j^s \Rightarrow \Psi_{h(i)}^t = \Psi_{h(j)}^t).$$

<u>Теорема 2</u>. Пусть h $(s\to t)$ – экстенсионалная функция $(t\neq 0)$. Тогда существует единственный рекурсивный функционал $f^{(s\to t)}$, такой, что

$$(\forall i)(ank(i,s) \Rightarrow f^{(s\to t)}(\Psi_i^s) = \Psi_{h(i)}^t).$$

Доказаны обобщения теорем I,2 и для случая $t = 0$.

<u>Теорема 3</u>. Пусть $f^{(s\to s)}$, $(s\neq 0)$ – рекурсивный функционал. Существует рекурсивный функционал f_*^s, такой, что

$$f^{(s\to s)}(f_*^s) = f_*^s \text{ и } f^{(s\to s)}(g^s) = g^s \Rightarrow f_*^s \leq g^s.$$

<u>Определение 4</u>. (I)Все функционалы типа 0 L – рекурсивные. Число f^0 называется L – номером функционала f^0: $\Phi_{f^0}^0 = f^0$.

(2) Функционал $f^{(s\to 0)}$ называется L – рекурсивным, если существует частично рекурсивная функция h, такая, что

$$(\forall i)\,[\Phi_i^s \text{ существует} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ((!h(i) \Rightarrow f^{(s\to 0)}(\Phi_i^s) = \Phi_{h(i)}^0) \,\&\, (\neg !h(i) \Rightarrow \neg ! f^{(s\to 0)}(\Phi_i^s)))].$$

L – номером функционала $f^{(s\to 0)}$ называется произвольный номер i функции h: $f^{(s\to 0)} = \Phi_i^{(s\to 0)}$.

3) Функционал $f^{(s\to t)}$, $(t \neq 0)$ называется L -рекурсивным, если существует общерекурсивная функция h, такая, что

$$(\forall i)\ [\Phi_i^s \text{ существует} \Rightarrow f^{(s\to t)}(\Phi_i^s) = \Phi_{h(i)}^t].$$

L - номер функционала $f^{(s\to t)}$ определяется аналогично (2).

<u>Теорема 5</u>. Всякий рекурсивный функционал является продолжением некоторого L - рекурсивного функционала. Всякий L - -рекурсивный функционал продолжим до рекурсивного.

Для доказательства теоремы 5 усилены теоремы I и 2. Для первой из них показана возможность эффективного нахождения номера функции h через номера функционала $f^{(s\to t)}$, для второй - обратное - возможность определения номера $f^{(s\to t)}$ при помощи номера функции h.

Уже после того, как эта работа была закончена, автор узнал о работе [4], из основных результатов которой следуют теоремы I, 2.

Литература

I. Гедель К. Об одном ещё не использованном расширении финитной точки зрения. В сб.:"Математическая теория логического вывода." М., 1967, 299-305.

2. Катленд Н. Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций. М., 1983.

3. Лорентс П. Иерархия Леба-Вайнера и общерекурсивные функции. В сб.:"Рекурсивные функции", Иваново, 1978.

4. Чернов В.П. О конструктивных операторах конечных типов. Зап. научных семинаров Ломи, <u>32</u>, 1972. 140-147.

5. Helm, J. On Effective Operators. Zeitschr. Math. Logik. Grundlagen Math. <u>17</u>, 1971, №3, 378-392.

Институт кибернетики АН ЭССР
Сектор математики